

Die Gleichungen der Plattenbiegung als kanonisches System in tensorieller Darstellung

Günther, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 5, 1953,
S. 103-121



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die Gleichungen der Plattenbiegung als kanonisches System in tensorieller Darstellung

Von Wilhelm Günther

Vorgelegt von Herrn H. Schaefer

Mit 4 Abbildungen

Summary: The equations of thin elastic plates (Kirchhoff's theory) are derived in tensor notation and transformed into a canonical system. A brief preface of the most important symbols and rules of tensor calculus is added to the report. It is mentioned in which lines a development of mathematical theory is desirable in order to confirm the dominating position of the canonical formalism (which is known in case of one dimension) for the theory of elasticity in two (or three) dimensions.

☛ Übersicht: Die Gleichungen der Kirchhoffschen Plattentheorie werden in tensorieller Form hergeleitet und in die Gestalt eines Systems kanonischer Gleichungen gebracht. Dem Referat ist eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Bezeichnungen und Rechenregeln der Tensorrechnung vorangestellt. Es wird darauf hingewiesen, nach welcher Richtung hin ein Ausbau der mathematischen Theorien wünschenswert wäre, um die von eindimensionalen Sonderfällen her bekannte Zentralstellung des „kanonischen Variationsproblems“ auch für mehrdimensionale Elastizitätsprobleme zu bestätigen.

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit sollen die Gleichungen der Biegung elastischer Platten von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus entwickelt werden, um an einem einfachen Modell das Zusammenwirken von Methoden zu zeigen, die zwar einer gemeinsamen Wurzel — der Invariantentheorie — entspringen, der Verschiedenheit der Anwendungsgebiete entsprechend jedoch zu selbständigen Disziplinen geworden sind. Es handelt sich um die Methoden der Tensoranalysis einerseits, wie sie in der Differentialgeometrie ausgebildet worden sind, und die Methoden der Systemmechanik andererseits, die insbesondere in der Himmelsmechanik verwendet werden. Neuerdings werden aber beide Methodengruppen auch für die Bedürfnisse der Technischen Mechanik herangezogen: so dringt z. B. die Tensoranalysis über die Schalenstatik und über die Theorie der endlichen Verformungen in die Elastomechanik ein.

Die Feldgleichungen der Elastizitätstheorie können bekanntlich mit den Hilfsmitteln der Tensorrechnung so formuliert werden, daß ihre Gestalt unabhängig ist von der Wahl eines speziellen Koordinatensystems, wobei es prinzipiell gleichgültig ist, ob man sich der „symbolischen“ oder der „koordinatenmäßigen“ Schreibweise bedient. Für die Zwecke der Elastomechanik ist aber die Koordinatenschreibweise wohl vorzuziehen, da sie eine ständige Dimensionenkontrolle ermöglicht — man kann diese Form der Tensoranalysis geradezu als eine erweiterte Dimensionenanalyse ansehen —, und da ferner mit ihr die Randbedingungen eines elastischen Problems besser erfaßt werden

können, als dies in der symbolischen Darstellung möglich ist. Leider steht die Koordinatenschreibweise heute noch in dem Ruf, „unanschaulich“ zu sein. Diese Auffassung ist historisch bedingt und sollte gerade im Hinblick auf die Bedürfnisse der Elastomechanik revidiert werden. Ob man in dem Symbol „ \mathfrak{v} “ oder in der Form v^i einen Vektor wiederzuerkennen geneigt ist, ist nur eine Frage der Gewöhnung und nicht der Anschaulichkeit; die zweite Darstellung gibt aber über das bloße Symbol hinaus eine Anweisung, wie der Vektor zahlenmäßig erfaßt werden kann, wenn man in einem nichtcartesischen Koordinatensystem rechnet¹⁾).

Diese Methoden lassen sich nun mit denjenigen Verfahren verknüpfen, die in der Mechanik der Systeme („Analytische Mechanik“) entwickelt worden sind. Daß man sie mit Vorteil auch in der Kontinuumsmechanik verwenden kann, ist eine neuere Erkenntnis, die man wohl Prange [2] verdankt. Durch die Einführung von „kanonischen Veränderlichen“ wird das Problem gewissermaßen in seine elementaren Bestandteile zerlegt, die dann nach Bedarf wieder zu geeigneten Gruppen zusammengefaßt werden können. Bei der Anwendung dieses Verfahrens auf „eindimensionale“ elastische Probleme (Balken, Kreisringplatte, Rotationsschale) hat es sich gezeigt, daß man fast alle bekannten Verfahren der Schwingungs- und Festigkeitsrechnung in den Gedankenkreis dieses „kanonischen Variationsproblems“ einordnen und darüber hinaus zu neuartigen Rechenverfahren kommen kann [3, 4, 5]. Es ist zu vermuten, daß dies auch bei mehrdimensionalen Problemen gelingen müßte, etwa beim Problem der Plattenbiegung. Leider ist man noch weit davon entfernt, hier präzise Aussagen machen zu können. Bisher ist es weder gelungen, von den kanonischen Gleichungen her die Integralgleichungen des Problems aufzubauen wie in [4], noch eine Theorie der „kanonischen Transformationen“ zu entwickeln, die für die Anwendung in der Elastomechanik brauchbar wäre. Die von Carathéodory [6] stammenden einschlägigen Arbeiten beschäftigen sich vorwiegend mit mathematischen Fragen und lassen keinen Anhaltspunkt erkennen, wie die Theorie nach der praktischen Seite hin ausgebaut werden könnte. Das wäre auch für den Aufbau einer rationellen Störungsrechnung bei mehrdimensionalen Problemen wichtig, von der man allerdings von vornherein erwarten kann, daß sie ungleich komplizierter sein wird als im eindimensionalen Fall²⁾. Hier dürften enge Beziehungen zur Funktionalanalysis bestehen.

1. Zerlegung eines Vektors; der Maßtensor

In einem cartesischen Koordinatensystem (x, y) ist ein Vektor \mathfrak{v} durch Angabe seiner Projektionen v_x und v_y auf die Koordinatenlinien gegeben:

$$\mathfrak{v} = i v_x + j v_y, \quad (1.1)$$

(i, j Einheitsvektoren in x - bzw. y -Richtung).

¹⁾ Vgl. hierzu etwa die Ausführungen von A. Duschek [1].

²⁾ Eine solche Störungsrechnung z. B. in [5].

Ist das Koordinatensystem nichtcartesisch, so muß eine Zerlegungsvorschrift vereinbart werden. Zwanglos ergeben sich zwei Möglichkeiten:

(I) Seien $x^{(1)} = x^{(1)}(x, y)$ und $x^{(2)} = x^{(2)}(x, y)$ die neuen Koordinaten. In einem Punkte P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} führt man durch

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

Maßvektoren ein, welche die Richtung der Tangenten an die Koordinatenlinien haben (Abb. 1). Mit Hilfe dieser Maßvektoren zerlegt man \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 v^1 + \mathbf{a}_2 v^2 = \mathbf{a}_a v^a \quad (1.3)$$

(über griechische Indizes, die in einem Formelglied genau zweimal vorkommen, wird von 1 bis 2 summiert!). v^1 und v^2 sind die „kontravarianten Maßzahlen“ von \mathbf{v} . Sie transformieren sich beim Übergang zu neuen Koordinaten $x^{(i)} = x^{(i)}(x^{(1)}, x^{(2)})$ wie folgt:

$$v^i = v^a \frac{\partial x^i}{\partial x^a} \quad (i = 1, 2). \quad (1.4)$$

(II) Wir konstruieren zwei Maßvektoren \mathbf{b}^1 und \mathbf{b}^2 , welche die Richtung der Normalen zu den Kurven $x^{(i)} = \text{const}$ haben. Der Maßvektor \mathbf{b}^i steht also für $i \neq k$ senkrecht auf dem Maßvektor \mathbf{a}_k . Die Länge der \mathbf{b}^i wählen wir so, daß

$$\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{a}_k = \delta_k^i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases} \quad (1.5)$$

wird. Die Zerlegung von \mathbf{v} mit Hilfe der \mathbf{b}^i schreiben wir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}^1 v_1 + \mathbf{b}^2 v_2 = \mathbf{b}^a v_a; \quad (1.6)$$

v_1 und v_2 sind die „kovarianten Maßzahlen“ von \mathbf{v} . Beim Übergang zu neuen Koordinaten lautet ihr Transformationsgesetz:

$$v_i = v_a \frac{\partial x^a}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2). \quad (1.7)$$

Aus (1.3) und (1.5) bzw. (1.6) und (1.5) folgt:

$$v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \quad (1.8)$$

In den Zerlegungen

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^a} dx^a = \mathbf{a}_a dx^a = \mathbf{b}^a dx_a \quad (1.9)$$

des infinitesimalen Vektors, der von P zu einem benachbarten Punkte P' führt, sind die dx^i die kontravarianten, die dx_i die kovarianten Maßzahlen von $d\mathbf{r}$. Für das Quadrat der Strecke PP' erhält man:

$$\begin{aligned} ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{b}^\beta dx_\alpha dx_\beta = g^{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta. \end{aligned} \quad (1.10)$$

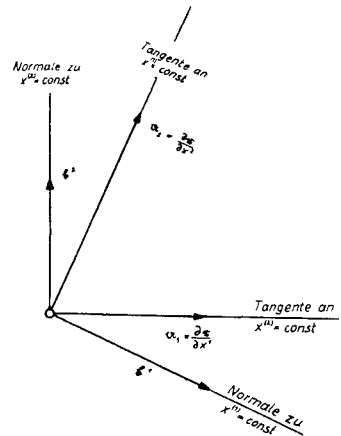


Abb. 1. Maßvektoren

Die g_{ik} bzw. g^{ik} sind die in i und k symmetrischen ko- bzw. kontravarianten Maßzahlen des „Maßtensors“; die (1. 7) bzw. (1. 4) entsprechenden Transformationseigenschaften

$$\bar{g}_{ik} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, \quad g^{ik} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\beta} \quad (1.11)$$

rechtfertigen diese Bezeichnungsweise. Den Maßtensor kann man benutzen, um die kovarianten Maßzahlen eines Vektors \mathfrak{v} in seine kontravarianten Maßzahlen zu überführen und umgekehrt:

$$v^i = g^{ia} v_a, \quad v_i = g_{ia} v^a. \quad (1.12)$$

Abb. 2 zeigt, wie das Messen mit Hilfe des Maßtensors vor sich geht; dort sind ferner die Einheitsvektoren

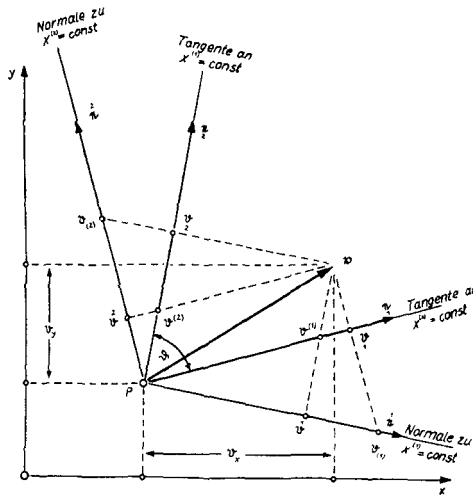


Abb. 2. Zerlegung eines Vektors und Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \mathfrak{a}_2; \\ \mathfrak{e}^1 &= \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \mathfrak{b}^1, & \mathfrak{e}^2 &= \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \mathfrak{b}^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

eingetragen. Für den Winkel ϑ zwischen den Tangenten an die Koordinatenlinien findet man:

$$\cos \vartheta = \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \quad (1.14)$$

und analog für den Winkel $\vartheta^* = \vartheta + \frac{\pi}{2}$ zwischen den Normalenrichtungen:

$$\cos \vartheta^* = \mathfrak{e}^1 \cdot \mathfrak{e}^2 = \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{22}}} \mathfrak{b}^1 \cdot \mathfrak{b}^2 = \frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11} g^{22}}}. \quad (1.15)$$

$$\begin{array}{ll}
 v^1 = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} v^1, & v^2 = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} v^2; \\
 v_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} v_1, & v_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} v_2; \\
 v^{(1)} = \sqrt{g_{11}} v^1, & v^{(2)} = \sqrt{g_{22}} v^2; \\
 v_{(1)} = \sqrt{g^{11}} v_1, & v_{(2)} = \sqrt{g^{22}} v_2.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 e_1 \left\{ \begin{array}{l} e^1_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \\ e^2_1 = 0 \end{array} \right. & e_2 \left\{ \begin{array}{l} e^1_2 = 0 \\ e^2_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \end{array} \right. \\
 e_1 \left\{ \begin{array}{l} e^1_1 = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \\ e^2_1 = 0 \end{array} \right. & e_2 \left\{ \begin{array}{l} e^1_2 = 0 \\ e^2_2 = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \end{array} \right.
 \end{array}$$

2. Tensoralgebra

Ein System von Größen c_{i_1, \dots, i_n} ist ein System von kovarianten Maßzahlen eines Tensors „ n -ter Stufe“ (kurz: ein Tensor n -ter Stufe) dann und nur dann, wenn diese Größen sich beim Übergang zu neuen Koordinaten in den einzelnen Indizes kovariant transformieren:

$$c_{i_1, \dots, i_n} = c_{a_1, \dots, a_n} \cdot \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{a_n}}{\partial x^{i_n}}. \quad (2.1)$$

Entsprechendes gilt für die kontravarianten Maßzahlen. Der in (1.12) für einen Vektor (einen Tensor 1. Stufe) definierte Prozeß des „Heraufziehens“ bzw. „Herunterziehens“ eines Index läßt sich auf Tensoren beliebiger Stufe ausdehnen; z. B. sind

$$c^i_{\cdot k} = g^{ia} c_{ak}, \quad c^i_{\cdot k} = g^{ka} c_{ia} \quad (2.2)$$

die „gemischten Maßzahlen“ eines Tensors 2. Stufe und

$$c^{ik} = g^{ia} g^{kb} c_{ab} \quad (2.3)$$

seine kontravarianten Maßzahlen. Für den Maßtensor selbst ergibt sich so:

$$g^i_{\cdot k} = g_k^{\cdot i} = \delta^i_k = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases} \quad (2.2a)$$

Im allgemeinen ist aber $c^i_{\cdot k} \neq c_k^{\cdot i}$.

(2.2) und (2.3) sind Spezialfälle der sogenannten „Überschiebung“, mit deren Hilfe u. a. die Stufe eines Tensors reduziert werden kann. So ist

$$c = g^{a\beta} c_{a\beta} = g_{a\beta} c^{a\beta} = c^a_a. \quad (2.4)$$

die (erste) skalare Invariante des Tensors c_{ik} (in cartesischen Koordinaten: $c = c_{11} + c_{22}$), die sich für den Maßtensor zu

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 2 \quad (2.4a)$$

ergibt. Aus den beiden Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} entsteht durch Überschiebung ihr skalares Produkt:

$$p = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^a v_a = u_a v^a, \quad (2.5)$$

und durch Überschiebung eines Tensors 2. Stufe mit einem Vektor ein neuer Vektor:

$$s^{ia} u_a = v^i. \quad (2.6)$$

Die Überschiebung ist also eine Operation, die im „Wegheben“ zweier gleichartiger (griechischer!) Indizes besteht. Man beachte die Analogie zur Rechnung mit Dimensionssymbolen [die natürlich keineswegs zufällig ist¹⁾]; sie findet sich auch in den folgenden Rechenregeln der Tensoralgebra wieder:

(I) Mit c_{i_1, \dots, i_n} ist auch $a \cdot c_{i_1, \dots, i_n}$ ein Tensor n -ter Stufe, wenn a eine skalare Funktion ist.

(II) Unter der Summe zweier Tensoren versteht man denjenigen Tensor, dessen Maßzahlen durch Addition der einander entsprechenden Einzelmaßzahlen gebildet werden. Demgemäß darf eine solche Summe nur Glieder mit gleichen Indizes in gleicher Stellung enthalten.

(III) Eine Tensorgleichung gilt, wenn überhaupt, in allen Koordinatensystemen, die durch umkehrbar eindeutige Transformationen auseinander hervorgehen. Bei einer solchen Transformation erhalten ja alle Glieder der Tensorgleichung die gleichen Transformationskoeffizienten.

Infolge (III) wird man, obwohl man mit den Maßzahlen (genauer: mit den Maßzahlsymbolen) rechnet, unabhängig vom Koordinatensystem, dessen spezielle Wahl nur die Auswertung der Gleichungen beeinflusst. Die hiermit gewonnene Freiheit des Standpunktes zusammen mit der Möglichkeit einer ständigen „Dimensionenkontrolle“ läßt die Tensorrechnung in der hier gewählten Darstellung als das gegebene Hilfsmittel zum Erfassen physikalischer Zusammenhänge erscheinen.

3. Kovariante Differentiation

Aus einer skalaren Funktion $f(x^{(1)}, x^{(2)})$ entsteht durch Differentiation ein Vektor, ihr Gradient

$$v_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (3.1)$$

Die Differentiation eines Vektors ergibt jedoch keineswegs einen Tensor 2. Stufe, da

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^k} \neq \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial \bar{x}^\beta} \cdot \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^k}$$

ist.

¹⁾ Eine sorgfältige Analyse dieser Zusammenhänge in [7].

Das ist auch geometrisch einzusehen: In einem Vektorfeld $v_i(x^{(1)}, x^{(2)})$ setzt sich die Änderung des Feldvektors beim Fortschreiten von P nach P' zusammen aus einer „Führungsänderung“, die von der Verschiedenheit der Meßvorschriften in P und P' herrührt, und aus einer „relativen Änderung“, wie sie auch bei gleicher Meßvorschrift in P und P' auftreten würde. Man kann zeigen, daß die totale Änderung der Maßzahlen v_i die Gestalt

$$Dv_i = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x^a} - \Gamma_{ia}^{\beta} v_{\beta} \right] dx^a = (V_a v_i) dx^a \quad (3.2)$$

hat. Die Größe $V_k v_i$ ist ein Tensor 2. Stufe, der „kovariante Differentialquotient“ des Vektors v_i . Die „Dreiindizesymbole“ Γ_{ik}^l in (3.2) — sie verhalten sich wie ein Tensor nur gegenüber affinen Transformationen — sind aus dem Maßtensor wie folgt zu berechnen: Zunächst bestimmt man die Größen

$$a_a \cdot \frac{\partial a_i}{\partial x^k} = \Gamma_{a, ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ka}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^a} \right) \quad (3.3)$$

und sodann durch Überschiebung:

$$\Gamma_{ik}^l = g^{la} \Gamma_{a, ik}. \quad (3.4)$$

Für die kovariante Differentiation der kontravarianten Maßzahlen gilt:

$$V_i v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ia}^k v^a, \quad (3.5)$$

für einen Tensor 2. Stufe:

$$V_i s_{k, l}^{\cdot} = \frac{\partial s_{k, l}^{\cdot}}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^a s_{a, l}^{\cdot} + \Gamma_{ia}^l s_{k, a}^{\cdot}. \quad (3.6)$$

usw. Für einen Skalar fallen kovarianter und gewöhnlicher Differentialquotient zusammen. Die Berechnung der Dreiindizesymbole ist nur bei der speziellen Wahl eines Koordinatensystems erforderlich; im übrigen darf man mit dem Symbol der kovarianten Differentiation in der euklidischen Ebene wie mit partiellen Differentialquotienten rechnen, insbesondere die Regeln zur Differentiation von Summen und Produkten anwenden. Es ist eine bemerkenswerte Eigenschaft des Maßtensors, daß er kovariant konstant ist:

$$V_i g_{kl} = 0, \quad (3.7)$$

so daß beispielsweise

$$d = V_a v^a = V_a (g^{a\beta} v_{\beta}) = g^{a\beta} V_a v_{\beta} = V^{\beta} v_{\beta} \quad (3.8)$$

wird. Der Ausdruck (3.8) heißt die „Divergenz“ des Vektorfeldes v und geht für cartesische Koordinaten in die bekannte Form

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (3.8a)$$

über. Ähnlich wird die Divergenz eines (symmetrischen) Tensorfeldes $s^{ik} = s^{ki}$ durch

$$\operatorname{Div} S = V_a s^{ak} = w^k \quad (3.9)$$

definiert und liefert einen Vektor \mathfrak{w} . Wir haben keinen Anlaß, auf die umfangreiche Theorie der Tensorfelder näher einzugehen — hierzu sei besonders auf das Lehrbuch [8] von Duschek-Hochrainer verwiesen —, sondern schreiben nur noch im Hinblick auf spätere Anwendungen den Integralsatz von Gauß für ein einfach berandetes Gebiet der Ebene hin:

$$\iint_{(f)} \nabla_a v^a df = \oint_{(k)} v^a n_a ds; \quad (3.10)$$

\mathfrak{v} ist ein in dem betreffenden Gebiet stetiges und differenzierbares Vektorfeld, \mathfrak{n} der ins Außengebiet gerichtete Vektor der Randnormalen.

4. Verzerrungs- und Spannungstensor; das Hookesche Gesetz für den ebenen Spannungszustand

Wir betrachten das Feld der Verschiebungsvektoren u_i , die bei einer (infinitesimalen) Verzerrung jeden Punkt eines ebenen Kontinuums in einen Nachbarpunkt überführen. Die totale Änderung des Feldvektors beim Fortschreiten längs eines infinitesimalen Vektors $d\mathfrak{s}$ ist:

$$Du_i = \nabla_a u_i ds^a. \quad (4.1)$$

Wir spalten (4.1) auf:

$$Du_i = \frac{1}{2} (\nabla_a u_i + \nabla_i u_a) ds^a + \frac{1}{2} (\nabla_a u_i - \nabla_i u_a) ds^a \quad (4.2)$$

und nennen den in i und k symmetrischen Tensor

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_k + \nabla_k u_i) \quad (4.3)$$

den Verzerrungstensor, da er im Falle infinitesimaler Verzerrung die Deformation des Mediums in der Umgebung von P beschreibt [9]. Der in i und k schiefsymmetrische Tensor

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_k - \nabla_k u_i) \quad (4.4)$$

vermittelt eine starre Bewegung der Umgebung von P . Er verschwindet identisch, wenn das Verschiebungsfeld ein Gradientenfeld ist („reine Verzerrung“):

$$u_i = \nabla_i \Phi(x^{(1)}, x^{(2)}); \quad (4.5)$$

die Änderung des Verschiebungsvektors

$$Du_i = \varepsilon_{ia} ds^a \quad (4.6)$$

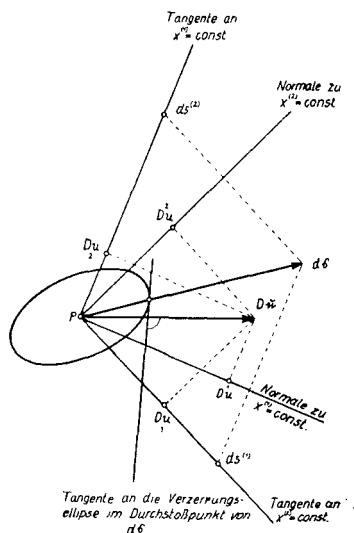


Abb. 3.

Konstruktion und Zerlegung der totalen Änderung des Verschiebungsvektors

kann dann mit Hilfe der Verzerrungsellipse

$$\varepsilon_{\lambda\mu} y^\lambda y^\mu = 1 \quad (4.7)$$

nach der Poinsoischen Konstruktion aus dem Richtungselement $d\mathbf{s}$ ermittelt werden. Dabei ist jedoch zu beachten, daß der Verzerrungstensor einer reinen Verzerrung nicht beliebig vorgegeben werden kann. Eliminiert man nämlich aus (4.3) unter Beachtung von (4.5) die Verschiebungen, so erhält man für den Verzerrungstensor die Integrabilitätsbedingungen

$$\nabla_l \varepsilon_{ik} - \nabla_i \varepsilon_{lk} = 0, \quad (4.8)$$

ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen für den Verzerrungstensor.

Die Projektionen von Du_i auf die Tangenten an die Kurven $x^{(i)}$ sind

$$Du_i = \varepsilon_{i(a)} d s^{(a)} \quad (4.9)$$

mit

$$\varepsilon_i^{(k)} = \varepsilon_{ik} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}, \quad (4.10)$$

die Projektionen auf die Normalenrichtungen:

$$Du^i = \varepsilon_{(a)}^i d s^{(a)} \quad (4.11)$$

mit

$$\varepsilon_{(k)}^i = \varepsilon_{ik}^i \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}. \quad (4.12)$$

Für die Parallelprojektionen lassen sich leicht entsprechende Formeln angeben.

Legt man in P einen Schnitt längs der Koordinatenlinie $x^{(k)} = \text{const}$, so vermittelt der in i und k symmetrische Spannungstensor die Zuordnung des Spannungsvektors zum Normaleinheitsvektor:

$$t^k_i = s^{ik} e_a^k = s^{ik} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}}. \quad (4.13)$$

Parallelprojektion auf die Tangente an die Koordinatenlinie $x^{(i)}$ ergibt

$$t^{(i)}_k = t^i_k / g_{ii} = s^{ik} \cdot \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{kk}}}; \quad (4.14)$$

Orthogonalprojektion auf dieselbe Tangente:

$$t^k_i = s^{ik} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}. \quad (4.15)$$

Die geometrische Konstruktion des Spannungsvektors \mathbf{t} mit Hilfe der Spannungsellipse

$$s_{\lambda\mu} y^\lambda y^\mu = 1 \quad (4.16)$$

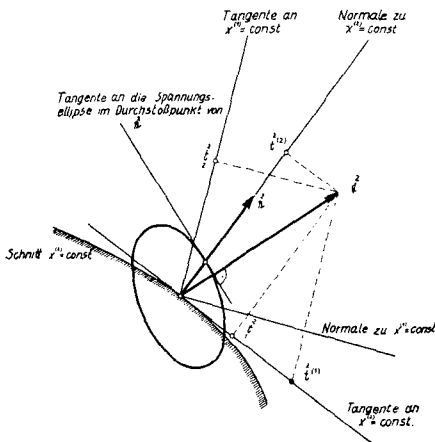


Abb. 4. Konstruktion und Zerlegung des Spannungsvektors im Schnitt $x^{(2)} = \text{const.}$

und seine Zerlegungen zeigt Abb. 4. Spannungstensor und Verzerrungstensor sind verknüpft durch das Hookesche Gesetz. Für den ebenen Spannungszustand lautet es in tensorieller Form:

$$s_{ik} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left\{ [(1-\nu)\varepsilon_{ik} + \nu g_{ik} g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}] \right\} \quad (4.17)$$

Die Richtigkeit von (4.17) sieht man am einfachsten ein, wenn man beachtet, daß die Gleichung in cartesischen Koordinaten richtig ist. Als Tensorgleichung gilt sie daher in jedem zulässigen Koordinatensystem.

5. Die Plattengleichungen und ihre Transformation in die kanonische Gestalt

Unter den üblichen Annahmen der Plattentheorie (kleine Verschiebungen, keine Querkraftverformung) wird das elastische Verhalten der Platte durch die Verschiebung q_0 der Plattenmittelebene allein beschrieben. Wir wählen ein angepaßtes Koordinatensystem folgendermaßen: die z -Achse steht senkrecht zur Plattenmittelebene; in der Plattenmittelebene seien $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ solche Koordinaten, daß der Plattenrand von endlich vielen Koordinatenlinien $x^{(i)} = \text{const}$ gebildet wird. Bei der Verformung entsteht in der Platte ein einfaches Verschiebungsfeld, da wegen der ausgeschlossenen Querkraftverformung jede Normale zur Mittelebene auch nach der Verformung Normale bleibt. Infolgedessen gilt im Plattenpunkte $P(x^{(1)}, x^{(2)}, z)$ für den Verschiebungsvektor u :

$$u_i = -z \frac{\partial q_0}{\partial x^{(i)}}, \quad (5.1)$$

woraus durch Übergang zu den Maßzahlen gemäß Abb. 2

$$u_i = -z \frac{\partial q_0}{\partial x^i} = -z \cdot \nabla_i q_0 \quad (5.2)$$

hervorgeht. Offensichtlich ist der Gradientenvektor $q_i = \nabla_i q_0$ den (kleinen) Neigungswinkeln der Plattenmittelfläche durch

$$q_i = \nabla_i q_0 = \sqrt{g_{ii}} \alpha_{(i)} \quad (5.3)$$

zugeordnet. Da reine Verzerrung vorliegt, ist nach Vorgabe eines den Integrabilitätsbedingungen genügenden Verzerrungstensors und der Randverschiebungen der Verschiebungszustand festgelegt. Aus dem Verzerrungstensor

$$\varepsilon_{ik} = -z \nabla_i \nabla_k q_0 \quad (5.4)$$

kann nach (4.17) der Spannungstensor berechnet werden:

$$s_{ik} = -z \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu) V_i V_k q_0 + \nu g_{ik} g^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta q_0], \quad (5.5a)$$

oder auch

$$s_{ik} = -z \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu) \delta_i^\alpha \delta_k^\beta + \nu g_{ik} g^{\alpha\beta}] V_\alpha V_\beta q_0. \quad (5.5b)$$

Aus dem Spannungstensor bilden wir durch Multiplikation mit z und Integration über die Plattendicke h den „Momententensor“

$$M_{ik} = \int_{-h/2}^{+h/2} z s_{ik} dz = -N [(1-\nu) \delta_i^\alpha \delta_k^\beta + \nu g_{ik} g^{\alpha\beta}] V_\alpha V_\beta q_0, \quad (5.6)$$

wobei

$$N(x^{(1)}, x^{(2)}) = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.7)$$

die im allgemeinen von Punkt zu Punkt veränderliche „Plattensteifigkeit“ ist. In cartesischen Koordinaten sind die Maßzahlen

$$M_{11} = M_x, \quad M_{12} = M_{xy}, \quad M_{22} = M_y \quad (5.8)$$

die Biegemomente bzw. das Drillmoment pro Längeneinheit eines Plattenchnittes. (5.6) läßt sich nach den Verschiebungen auflösen: Durch Überschiebung mit g^{ik} erhält man zunächst:

$$g^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta q_0 = -\frac{1}{N(1+\nu)} g^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}. \quad (5.9)$$

Dies setzt man wieder in (5.6) ein und erhält:

$$V_i V_k q_0 = -\frac{1}{N(1-\nu^2)} [(1+\nu) M_{ik} - \nu g_{ik} g^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}], \quad (5.10a)$$

oder auch

$$V_i V_k q_0 = -\frac{1}{N(1-\nu^2)} [(1+\nu) \delta_i^\alpha \delta_k^\beta - \nu g_{ik} g^{\alpha\beta}] M_{\alpha\beta}. \quad (5.10b)$$

Die in der Platte aufgespeicherte elastische Energie entstammt den von den Momenten an den Winkeländerungen geleisteten Arbeit, ist also

$$\Phi = \frac{1}{2} \int \int_{(V)} M^{\alpha\beta} V_\alpha q_\beta dV, \quad (5.11)$$

was sich natürlich auch über die allgemeine Gleichung

$$\Phi = \frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} s^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dV \quad (5.12)$$

für die elastische Energie hätte herleiten lassen.

Die weitere Behandlung knüpft an das „Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie“ an, das unter der Voraussetzung starrer Stützungen und

fehlender eingepprägter Randkräfte bzw. Randmomente (diese ließen sich leicht nachträglich berücksichtigen) gemäß (5. 11) für die Platte lautet:

$$\delta \frac{1}{2} \iint_{(f)} [M^{\alpha\beta} V_{\alpha} q_{\beta} - 2 p \cdot q_0] df = 0, \quad (5. 13)$$

wobei $p = p(x^{(1)}, x^{(2)})$ die zur Plattenmittelfläche senkrechte Belastung ist. Zu variieren ist nach der Durchbiegung q_0 unter Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen. Wir haben also in (5. 13) den Momententensor und den Vektor q_i durch die Verschiebung q_0 auszudrücken. Wir benutzen (5. 3) und (5. 6) und erhalten das Variationsproblem (A_1) :

$$\begin{aligned} \delta \iint \left\{ \frac{1}{2} N [(1 - \nu) g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} + \nu g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}] V_{\alpha} V_{\beta} q_0 \cdot V_{\lambda} V_{\mu} q_0 - p \cdot q_0 \right\} df \\ = \delta \iint F df = 0. \end{aligned} \quad (5. 14)$$

Aus diesem Variationsproblem kann nach einer passenden Vereinbarung über den Variationsprozeß die Differentialgleichung der Plattenbiegung gewonnen werden. Hier soll jedoch (A_1) so umgeformt werden, daß sowohl die Verformungs- als auch die Beanspruchungsgrößen im Integranden erscheinen. Zu diesem Zweck führen wir den kovarianten Winkel q_i wieder ein, ersetzen also in (5. 14) $V_i q_0$ durch q_i . Die geometrische Bedingungsgleichung

$$V_i q_0 - q_i = 0 \quad (5. 15)$$

(die besagt, daß die Querkraftverformung ausgeschlossen ist, welche die Neigung der Normalen relativ zur Mittelfläche ändern würde) berücksichtigen wir, indem wir mit einem „Lagrangeschen Vektor“ Q^i , der die Reaktion auf die Bindung (5. 15) darstellt, den Ausdruck $Q^{\alpha} [V_{\alpha} q_0 - q_{\alpha}]$ zum Integranden hinzufügen. Wir bekommen:

$$\begin{aligned} \delta \iint \left\{ \frac{1}{2} N [(1 - \nu) g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} + \nu g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}] V_{\alpha} q_{\beta} V_{\lambda} q_{\mu} \right. \\ \left. + Q^{\alpha} [V_{\alpha} q_0 - q_{\alpha}] - p \cdot q_0 \right\} df = \delta \iint F^* df = 0. \end{aligned} \quad (5. 16)$$

Nach (5. 6) ist

$$M^{ik} = \frac{\partial F^*}{\partial (V_i q_k)} \quad (5. 17)$$

der negative Momententensor. Mit Hilfe von (5. 10a, b) können wir die Winkeländerung $V_i q_k$ in F^* durch \bar{M}^{ik} ausdrücken, müssen aber diese Umformung wieder berücksichtigen, indem wir die linke Seite von

$$V_i q_k - \frac{1}{N(1 - \nu^2)} [(1 + \nu) \bar{M}_{ik} - \nu g_{ik} g^{\rho\sigma} \bar{M}_{\rho\sigma}] = 0 \quad (5. 18)$$

mit einem „Lagrangeschen Tensor“ P^{ik} überschoben, zu F^* hinzufügen. Hierdurch wird im Variationsproblem der Momententensor unabhängig von

den Winkeländerungen. Die etwas mühsame Zwischenrechnung lassen wir fort und schreiben als ihr Ergebnis das neue Variationsproblem

$$\delta \int \int F^{**} df = 0 \quad (5.19)$$

hin, mit

$$F^{**} = \frac{1}{2N(1-\nu^2)} [(1+\nu)g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu} - \nu g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu}] \bar{M}_{\alpha\beta} \bar{M}_{\lambda\mu} + Q^\alpha [V_\alpha q_0 - q_\alpha] + \\ + P^{\alpha\beta} \left[V_\alpha q_\beta - \frac{1}{N(1-\nu^2)} [(1+\nu)\delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\sigma - \nu g_{\alpha\beta}g^{\nu\sigma}] \bar{M}_{\sigma\sigma} \right] - p \cdot q_0. \quad (5.20)$$

Um den Lagrangeschen Tensor P^{ik} wieder zu eliminieren, machen wir das Integral (5.19) zum Extremum bezüglich des Momententensors und erhalten aus

$$\frac{\partial F^{**}}{\partial \bar{M}_{ik}} = 0 \quad (5.21)$$

die Gleichung

$$[(1+\nu)g^{\alpha i}g^{\beta k} - \nu g^{\alpha\beta}g^{ik}] \bar{M}_{\alpha\beta} - [(1+\nu)\delta_\alpha^i \delta_\beta^k - \nu g_{\alpha\beta}g^{ik}] P^{\alpha\beta} = 0, \quad (5.22)$$

woraus unmittelbar folgt:

$$P^{ik} = M^{ik}. \quad (5.23)$$

Setzen wir (5.23) noch in (5.20) ein, so bekommen wir das „kanonische Variationsproblem“ (K_1):

$$\delta \int \int [Q^\alpha V_\alpha q_0 + \bar{M}^{\alpha\beta} V_\alpha q_\beta - H] df = 0 \quad (5.24)$$

mit der „Hamiltonschen Funktion“

$$H = \frac{1}{2N(1-\nu^2)} [(1+\nu)g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu} - \nu g_{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}] \bar{M}^{\alpha\beta} \bar{M}^{\lambda\mu} + Q^\alpha q_\alpha + p \cdot q_0. \quad (5.25)$$

Auf Grund unserer Herleitung können in (5.24) die Funktionen q_0 , q_i , Q^i , M^{ik} unabhängig voneinander variiert werden. Wir setzen noch fest, daß die Variation mit der kovarianten Differentiation vertauschbar sein soll:

$$\delta(V_i q_0) = V_i(\delta q_0); \quad \delta(V_i q_k) = V_i(\delta q_k); \quad (5.26)$$

die Variation soll also ein absoluter Differentiationsprozeß sein. Infolgedessen wird die Variation des Integrals (5.24):

$$\int \int \left\{ \delta Q^\alpha \cdot V_\alpha q_0 + \underline{Q^\alpha \cdot V_\alpha(\delta q_0)} + \delta \bar{M}^{\alpha\beta} \cdot V_\alpha q_\beta + \underline{\bar{M}^{\alpha\beta} \cdot V_\alpha(\delta q_\beta)} \right. \\ \left. - \frac{\partial H}{\partial Q^\alpha} \cdot \delta Q^\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_0} \cdot \delta q_0 - \frac{\partial H}{\partial \bar{M}^{\alpha\beta}} \delta \bar{M}^{\alpha\beta} - \frac{\partial H}{\partial q_\beta} \cdot \delta q_\beta \right\} df = 0. \quad (5.27)$$

Die unterstrichenen Glieder formen wir um:

$$Q^\alpha V_\alpha(\delta q_0) = V_\alpha(Q^\alpha \delta q_0) - V_\alpha Q^\alpha \cdot \delta q_0, \\ \bar{M}^{\alpha\beta} \cdot V_\alpha(\delta q_\beta) = V_\alpha(\bar{M}^{\alpha\beta} \delta q_\beta) - V_\alpha \bar{M}^{\alpha\beta} \cdot \delta q_\beta \quad (5.28)$$

und ziehen den Gaußschen Integralsatz (3. 10) heran. So bekommen wir:

$$\begin{aligned} \iint \left\{ \left[V_\alpha q_0 - \frac{\partial H}{\partial Q^\alpha} \right] \delta Q^\alpha - \left[V_\alpha Q^\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_0} \right] \delta q_0 \right. \\ \left. + \left[V_\alpha q_\beta - \frac{\partial H}{\partial M^{\alpha\beta}} \right] \delta M^{\alpha\beta} - \left[V_\alpha M^{\alpha\beta} + \frac{\partial H}{\partial q_\beta} \right] \delta q_\beta \right\} df \\ + \oint [Q^\alpha \delta q_0 + M^{\alpha\beta} \delta q_\beta] n_\alpha ds = 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Die notwendigen Extremumsbedingungen sind daher:

$V_i q_0 = \frac{\partial H}{\partial Q^i}$	$V_\alpha Q^\alpha = - \frac{\partial H}{\partial q_0}$
$V_i q_k = \frac{\partial H}{\partial M_{ik}}$	$V_\alpha M^{\alpha i} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$

(5.30)

$$\oint [Q^\alpha \delta q_0 + M^{\alpha\beta} \delta q_\beta] n_\alpha ds = 0. \quad (5.31)$$

(5.30) ist das System der „kanonischen Differentialgleichungen“ der Plattenbiegung, und (5.31) liefert die Randbedingungen des Problems, wie noch näher zu präzisieren sein wird. Ausführlich geschrieben, lauten die kanonischen Gleichungen:

$\begin{aligned} (a) \quad & V_i q_0 = q^i \\ & V_i q_k = \frac{1}{N(1-\nu^2)} [(1+\nu) g_{ik} g_{\alpha\beta} - \nu g_{i\alpha} g_{k\beta}] \bar{M}^{\alpha\beta} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & V_\alpha Q^\alpha = -p \\ & V_\alpha M^{\alpha i} = -Q^i \end{aligned} \quad (b) \quad (5.32)$
---	---

Die Plattengleichungen erscheinen also aufgespalten in zwei Gruppen: die Gruppe a) liefert die Spannungs-Formänderungsbeziehungen, die Gruppe b) die Gleichgewichtsbedingungen, in denen Q^i offenbar der Vektor der Querkraft ist.

Bemerkenswert ist nun nicht die Tatsache, daß die Plattengleichungen in dieser aufgelösten Form geschrieben werden können — die Gleichungen (5.32) sind ja durchaus bekannt und werden gewöhnlich synthetisch hergeleitet —, sondern daß sie einem Variationsproblem entspringen, welches so locker ist, daß in ihm alle geometrischen und dynamischen Plattengrößen als voneinander unabhängige Funktionen erscheinen; z. B. ist in ihm die Plattenneigung q_i unabhängig von der Durchbiegung q_0 ! Bevor wir die hieraus fließenden Folgerungen ziehen, wollen wir aber noch den Randausdruck (5.31) untersuchen. Wir betrachten ein Randstück, daß zwischen den Punkten P_1 und P_2 von einer Koordinatenlinie $x^{(1)} = \text{const}$ gebildet wird. Längs dieses Randstückes ist

$$ds = ds^{(2)} = \sqrt{g_{22}} \, d x^2, \quad n_\alpha = \dot{e}_\alpha \quad (\text{vgl. Abb. 2}). \quad (5.33)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\delta q_j &= \nabla_{\beta} (\delta q_0) = \frac{\partial \delta q_0}{\partial x^j} = \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(1)}} \frac{ds^{(1)}}{dx^j} + \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(2)}} \frac{ds^{(2)}}{dx^j}, \\ \delta q_1 &= \sqrt{g_{11}} \cdot \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(1)}}, \quad \delta q_2 = \sqrt{g_{22}} \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(2)}};\end{aligned}\quad (5.34)$$

und daher

$$\begin{aligned}M^{\alpha\beta} n_{\alpha} \delta q_{\beta} &= M^{11} \cdot \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^{11}}} \cdot \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(1)}} + M^{12} \cdot \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(2)}} \\ &= -\overset{1}{M}^{(1)} \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(1)}} - \overset{1}{M}^{(2)} \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(2)}}.\end{aligned}\quad (5.35)$$

$\overset{1}{M}^{(1)}$ bzw. $\overset{1}{M}^{(2)}$ sind im wesentlichen die Parallelprojektionen des Randspannungsvektors auf die Tangenten an die Koordinatenlinien $x^{(2)} = \text{const}$ bzw. $x^{(1)} = \text{const}$, denn aus der linearen Spannungsverteilung und aus (5.6) folgt:

$$s_{(\max)}^{ik} = \frac{6}{h^2} M^{ik} \quad (5.36)$$

und daher nach (4.14):

$$t_{(\max)}^{k(i)} = \frac{6}{h^2} M^{ik} \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g^{kk}}}, \quad (5.37)$$

$$\overset{k}{M}^{(i)} = \frac{h^2}{6} t_{(\max)}^{(i)}. \quad (5.38)$$

In (5.35) formen wir um:

$$\overset{1}{M}^{(2)} \cdot \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial s^{(2)}} [\overset{1}{M}^{(2)} \delta q_0] - \frac{\partial \overset{1}{M}^{(2)}}{\partial s^{(2)}} \delta q_0, \quad (5.39)$$

und daher

$$\begin{aligned}\int_{P_1}^{P_2} M^{\alpha\beta} n_{\alpha} \delta q_{\beta} &= - \int_{P_1}^{P_2} \overset{1}{M}^{(1)} \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(1)}} ds^{(2)} \\ &\quad + \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \overset{1}{M}^{(2)}}{\partial s^{(2)}} \cdot \delta q_0 ds^{(2)} - [\overset{1}{M}^{(2)} \cdot \delta q_0]_{P_1}^{P_2}.\end{aligned}\quad (5.40)$$

Ferner ist

$$Q^{\alpha} n_{\alpha} \cdot \delta q_0 ds = Q^1 \cdot \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \delta q_0 ds^{(2)} = \overset{1}{Q} \delta q_0 ds^{(2)}, \quad (5.41)$$

so daß wir schließlich für das von P_1 bis P_2 erstreckte Integral (5.31) den Ausdruck

$$\int_{P_1}^{P_2} \left[\overset{1}{Q} + \frac{\partial \overset{1}{M}^{(2)}}{\partial s^{(2)}} \right] \delta q_0 ds^{(2)} - \int_{P_1}^{P_2} \overset{1}{M}^{(1)} \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(1)}} ds^{(2)} - [\overset{1}{M}^{(2)} \cdot \delta q_0]_{P_1}^{P_2} \quad (5.42)$$

bekommen. In der gleichen Weise behandelt man die übrigen Randstücke und

schließt nun aus der Forderung, daß das Randintegral (5.31) verschwinden soll: Dort, wo in einem Rand $x^{(i)} = \text{const}$ außerhalb einer Ecke die geometrischen Randbedingungen

$$\delta q_0 = 0, \quad \frac{\partial \delta q_0}{\partial s^{(i)}} = 0 \quad (5.43)$$

die „Zwangsbedingungen“ des Problems, nicht erfüllt sind (z. B. in einem freien Rand, wo sowohl q_0 als auch $\frac{\partial q_0}{\partial s^{(i)}}$ nicht vorgeschrieben sind), ergeben sich von selbst als „natürliche Randbedingungen“ die Randgleichgewichtsbedingungen:

$$\bar{Q} + \frac{\partial \bar{M}^{(k)}}{\partial s^{(k)}} = 0 \quad (k \neq i), \quad \bar{M}^{(i)} = 0; \quad (5.44)$$

in einer nicht gehaltenen Ecke ergibt sich das Verschwinden einer Einzelkraft von der Größe $\bar{M}^{(i)} - \bar{M}^{(k)}$ (die bei einer gehaltenen Ecke natürlich als Reaktionskraft vom Auflager her erscheint).

Es ist nun leicht einzusehen, daß man diese Verhältnisse umkehren kann, indem man das zum Variationsproblem (K_1) duale kanonische Variationsproblem (K_2) formuliert:

$$\delta \int [q_0 V_\alpha Q^\alpha + q_\alpha V_\beta \bar{M}^{\alpha\beta} + H] df = 0 \quad (5.45)$$

mit der Hamiltonschen Funktion (5.25).

Aus ihm entspringen wiederum die kanonischen Gleichungen (5.32a, b) und ein Randintegral, dessen Verschwinden zu fordern ist. Da (K_2) durch partielle Integration aus (K_1) hervorgeht, werden die Zwangsbedingungen von (K_1) die natürlichen Randbedingungen von (K_2) , die natürlichen Randbedingungen von (K_1) die Zwangsbedingungen von (K_2) .

Von (K_1) und (K_2) ausgehend, können wir jetzt weitere Variationsprobleme entwickeln:

Wir nehmen erstens zum kanonischen Variationsproblem (K_1) die erste Gruppe (5.32a) der kanonischen Gleichungen (sowie die geometrischen Zwangsbedingungen) als Nebenbedingungen hinzu, ersetzen also in (K_1) die Ausdrücke $V_i q_k$ und $V_i q_s$ durch die rechten Seiten von (5.32a). Dann erhalten wir ein Variationsproblem (A) :

$$\delta \int \left\{ 2N(1 - \nu_2) [(1 + \nu) g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} - \nu g_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}] \bar{M}^{\alpha\beta} \bar{M}^{\lambda\mu} - p \cdot q_0 \right\} df = 0 \quad (5.46)$$

unter den Nebenbedingungen (5.32a), wobei die geometrischen Randbedingungen für Durchbiegung und Neigung zu beachten sind.

Und wir nehmen zweitens zum kanonischen Variationsproblem (K_2) die zweite Gruppe (5.32b) der kanonischen Gleichungen hinzu (unter Berück-

sichtigung der dynamischen Zwangsbedingungen), ersetzen also in (K_2) die Ausdrücke $\nabla_a Q^a$ und $\nabla_a \bar{M}^{ai}$ durch die rechten Seiten von (5.32b). Dann erhalten wir ein Variationsproblem (B):

$$\delta \iint \frac{1}{2N(1-\nu^2)} [(1+\nu)g_{a\lambda}g_{\beta\mu} - \nu g_{a\beta}g_{\lambda\mu}] \bar{M}^{a\beta} \bar{M}^{\lambda\mu} df = 0 \quad (5.47)$$

unter den Nebenbedingungen (5.32b), wobei die Randgleichgewichtsbedingungen zu beachten sind.

Diese Probleme (A) und (B) enthalten keine Ableitungen der gesuchten Funktionen mehr. Von Sonderfällen her ist bekannt (z. B. [3]), daß sie zur Klasse der „Hilbertschen“ Variationsprobleme gehören, deren Variationsgleichungen Integralgleichungen sind. Denkt man sich nämlich etwa die Nebenbedingungen (5.32a) dadurch abgegolten, daß man, unter Beachtung der geometrischen Randbedingungen, die Durchbiegung q_0 durch Integration aus dem Momententensor ermittelt (also „quellenmäßig“ darstellt), so erscheint es plausibel, daß aus (A) durch Variation nach dem Momententensor eine Integralgleichung für den Momententensor entstehen wird. Dies Vorgehen scheitert jedoch daran, daß in (5.32a) der Momententensor als Ausgangspunkt der Integration nicht willkürlich gewählt werden darf, sondern den Integrabilitätsbedingungen zu genügen hat, die sich aus (4.8) und (5.10b) ergeben:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \left\{ \frac{1}{N(1-\nu^2)} [(1+\nu)\delta_i^a \delta_k^j - \nu g_{ik}g^{aj}] \bar{M}_{a\beta} \right\} - \\ & - \nabla_i \left\{ \frac{1}{N(1-\nu^2)} [(1+\nu)\delta_i^a \delta_k^j - \nu g_{ik}g^{aj}] \bar{M}_{a\beta} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Es ist bisher nicht gelungen, diese Bedingungen zwanglos in das soeben beschriebene Vorgehen einzubauen. Hingegen scheint der dazu duale Vorgang — quellenmäßige Entwicklung des Momententensors aus Flächen- und Randlasten zur Erfüllung von (5.32b) und der Randgleichgewichtsbedingungen — beim Variationsproblem (B) grundsätzlich möglich zu sein; die Untersuchungen hierüber sind noch nicht abgeschlossen. Die Beherrschung des ganzen Fragenkomplexes würde sicherlich Fortschritte in der numerischen Behandlung der Plattengleichungen mit sich bringen.

Das Variationsproblem (B) läßt sich noch in anderer Weise behandeln. Der Momententensor als allgemeine Lösung von (5.32b) kann nämlich mit Hilfe von sogenannten „Spannungsfunktionen“ integralfrei geschrieben werden:

$$M^{ik} = g^{ik} \Phi + \nabla^i F^k + \nabla^k F^i - 2g^{ik} \nabla_a F^a; \quad (5.49)$$

Φ ist eine beliebige Lösung der „Poissonschen Gleichung“

$$g^{a\beta} \nabla_a \nabla_\beta \Phi = p(x^{(1)}, x^{(2)}), \quad (5.50)$$

F^i ein im abgeschlossenen Plattenbereich stetiges (und genügend oft differenzierbares) Vektorfeld, welches beliebig ist bis auf die Einschränkung, daß die nach (5.49) berechneten Momente und die Querkräfte

$$Q^i = -V^i \Phi + V^i V_a F^a - V_a V^a F^i \quad (5.51)$$

den Randgleichgewichtsbedingungen genügen müssen. Setzt man (5.49) in (B) ein, so erhält man durch Variation nach den F^i ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die F^i als notwendige Extremumsbedingung. Wir brauchen die Rechnung nicht durchzuführen — es ist bekannt [10], daß diese Differentialgleichungen mit den Integrabilitätsbedingungen (5.48) identisch sein müssen, in denen nur noch der Momententensor durch die Spannungsfunktionen auszudrücken ist (wie man umgekehrt die F^i dadurch gewinnt, daß man die Integrabilitätsbedingungen (5.48) zum Variationsproblem (A) hinzufügt mit Lagrangeschen Faktoren, die sich dann durch Variation nach den Momenten als die Spannungsfunktionen F^i herausstellen).

Mit diesem Verfahren sind bereits Rechnungen durchgeführt worden, bei denen es sich gezeigt hat, daß noch umfangreiche und systematische Voruntersuchungen erforderlich sein werden, um aus der Fülle der zur Verfügung stehenden Spannungsfunktionen die für typische Spezialfälle brauchbaren auszuwählen. Die Behandlung „benachbarter“ Fälle dürfte dann keine ernsthaften Schwierigkeiten mehr bereiten.

Diese Bemerkung leitet zu einer Fragestellung über, die mit der „kanonischen Gestalt“ der Variationsprobleme (K_1 bzw. (K_2)) zusammenhängt. Es ist oft wünschenswert, durch gewisse Transformationen der Veränderlichen aus einem gegebenen Variationsproblem neue Variationsprobleme zu erzeugen. Eine Transformation, welche ein kanonisches Variationsproblem wieder in ein kanonisches Variationsproblem überführt, heißt eine „kanonische Transformation“. Für eindimensionale Integrationsgebiete sind diese Transformationen ihrer zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten wegen eingehend untersucht worden: in der geometrischen Optik, wo diese Transformationen durch „Eikonale“ vermittelt werden, in der Systemmechanik etwa bei der Behandlung „verborgener“ Koordinaten, in der rechnenden Astronomie und in der Atomtheorie beim Störungsproblem. In der Theorie „eindimensionaler“ elastischer Körper hat man kanonische Transformationen verwendet, um entweder den Elastizitätsgleichungen eine dem gerade vorliegenden Zweck angepaßte Gestalt zu geben [3], oder aber, um an die bekannte Lösung eines „Grundproblems“ durch systematische Störungsrechnung die Lösung eines „benachbarten“ Problems anzuschließen [5]. Da diese Methoden theoretisch und praktisch von großer Tragweite sind, liegt es nahe, nach entsprechenden Erweiterungen auf mehrdimensionale Elastizitätsprobleme zu suchen. So könnte ein bedeutender Fortschritt auf dem Gebiete der praktischen Plattenberechnung verzeichnet werden, wenn es gelänge, durch eine geeignete kanonische Transformation das System (5.32) der kanonischen Gleichungen in ein iterationsfähiges System zu verwandeln, wie es etwa bei der symmetrischen Kreisringplatte vorliegt [11]. Bereits in der Einleitung wurde jedoch erwähnt, daß bisher

eine für unsere Zwecke brauchbare Theorie der mehrdimensionalen kanonischen Transformationen nicht vorhanden ist. Damit entfällt gleichzeitig die Möglichkeit, eine anpassungsfähige Störungstheorie etwa für die Plattenberechnung aufzubauen, mit deren Hilfe man z. B. den Einfluß von Änderungen in den Steifigkeits- oder Lagerungsverhältnissen erfassen könnte.

Literatur

- [1] Duschek, A., Matrizen, Vektoren und Tensoren. Oesterr. Ing.-Arch., Bd. I (1947).
- [2] Prange, G., Das Extremum der Formänderungsarbeit. Habilitationsschrift Hannover (um 1920).
- [3] Günther, W., Die Biegung kreissymmetrischer Ringplatten als Problem der Variationsrechnung. Dissertation Braunschweig (1946).
- [4] Schaefer, H., Über Anwendungen der Variationsrechnung auf technische Eigenwertprobleme. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft IV (1952).
- [5] Münz, H., Ein Integrationsverfahren für die Berechnung der Biegespannungen achsensymmetrischer Schalen unter achsensymmetrischer Belastung. Ing.-Arch., Bd. 19 (1951).
- [6] Carathéodory, C., 1. Über die kanonischen Veränderlichen in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. Math. Ann., Bd. 86 (1922).
2. Über ein Reziprozitätsgesetz der verallgemeinerten Legendreschen Transformation. Math. Ann., Bd. 86 (1922).
3. Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen. Acta Sciegd. Sect. Scient. Math. (1929).
- [7] Schouten, J. A., Tensor Analysis for Physicists. Oxford (1951).
- [8] Duschek, A., und Hochrainer, A., Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Wien (1950).
- [9] Deuker, E. A., Die Grundgleichungen der klassischen Elastizitätstheorie in allgemeinen Koordinaten. Deutsche Mathematik, 5. Jahrg. (1940).
- [10] Günther, W., Zur allgemeinen Theorie der Spannungsfunktionen. Habilitationsschrift Braunschweig (1952).
- [11] Günther, W., Ein Iterationsverfahren zur gleichzeitigen Berechnung der Beanspruchungsgrößen und der Durchbiegung einer kreissymmetrischen Ringplatte. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft IV (1952).